Maurizio Loreti

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi di Padova

Teoria degli Errori e Fondamenti di Statistica

Introduzione alla Fisica Sperimentale

Dicembre 2006
(Edizione privata fuori commercio)

Questo libro è stato completamente composto e stampato dall'autore. Sono stati adoperati i programmi TEX di Donald E. Knuth e LATEX di Leslie Lamport (nella versione LATEX 2ε); i caratteri tipografici sono quelli della famiglia Lucida, disegnati da Bigelow & Holmes e distribuiti dalla Y&Y Inc. in versione PostScript®. Il libro viene distribuito sotto la licenza GNU GPL, contenuta nell'appendice F.

IMPORTANTE:

questo testo non è ancora definitivo.

Viene mantenuto sotto CVS, e questo mi permette di risalire a tutti i cambiamenti effettuati a partire dalla data e dall'ora in cui TEX è stato eseguito:

il 18 dicembre 2006 alle 12:19.

Maurizio Loreti

© Copyright 1987–2005 Maurizio Loreti
🄯 Copyleft 2005–∞ (a free book distributed under the GNU GPL)
available at `http://wwwcdf.pd.infn.it/labo/INDEX.html`

Indice

Elenco delle figure **vii**

Prefazione **ix**

Prefazione alla sesta edizione **xi**

1 Introduzione **1**
1.1 Il metodo scientifico 2

2 La misura **5**
2.1 Misure dirette e misure indirette 5
2.2 Le unità di misura 6
2.3 Gli strumenti di misura 9
2.4 Errori di misura 12
2.5 Cifre significative ed arrotondamenti 17
2.6 Errore relativo 18

3 Elementi di teoria della probabilità **19**
3.1 La probabilità: eventi e variabili casuali 19
3.2 La probabilità: definizioni 20
3.3 Proprietà della probabilità 21
3.3.1 L'evento complementare 22
3.3.2 Probabilità totale 22
3.3.3 Probabilità condizionata e probabilità composta . . . 24
3.3.4 Il teorema di Bayes 25
3.4 Definizione assiomatica della probabilità 27
3.4.1 Le leggi della probabilità e la definizione assiomatica 27
3.5 La convergenza statistica 28

4 Elaborazione dei dati **31**
4.1 Istogrammi . . . 31
4.2 Stime di tendenza centrale . . . 33
4.2.1 La moda . . . 35
4.2.2 La mediana . . . 35
4.2.3 La media aritmetica . . . 37
4.2.4 Considerazioni complessive . . . 38
4.2.5 Prima giustificazione della media . . . 40
4.2.6 La media aritmetica espressa tramite le frequenze . . . 41
4.3 Stime di dispersione . . . 42
4.3.1 Semidispersione massima e quantili . . . 42
4.3.2 Deviazione media assoluta (errore medio) . . . 43
4.3.3 Varianza e deviazione standard . . . 43
4.4 Giustificazione della media . . . 44

5 Variabili casuali unidimensionali discrete **47**
5.1 Generalità . . . 48
5.2 Speranza matematica . . . 49
5.3 Il valore medio delle combinazioni lineari . . . 50
5.4 La varianza delle combinazioni lineari . . . 51
5.5 L'errore della media dei campioni . . . 54
5.6 La legge dei grandi numeri . . . 55
5.6.1 La disuguaglianza di Bienaymé–Čebyšef . . . 55
5.6.2 Il teorema di Čebyšef . . . 57
5.6.3 Il teorema di Bernoulli . . . 57
5.7 Valore medio e valore vero . . . 58
5.8 Scarto ed errore quadratico medio . . . 59
5.9 Stima della varianza della popolazione . . . 61
5.10 Ancora sull'errore quadratico medio . . . 61

6 Variabili casuali unidimensionali continue **65**
6.1 La densità di probabilità . . . 65
6.2 La speranza matematica per le variabili continue . . . 69
6.3 I momenti . . . 69
6.4 Funzione generatrice e funzione caratteristica . . . 71
6.4.1 Funzioni caratteristiche di variabili discrete . . . 75
6.5 Cambiamento di variabile casuale . . . 77
6.6 I valori estremi di un campione . . . 78

7 Variabili casuali pluridimensionali **81**
7.1 Variabili casuali bidimensionali . . . 81
7.1.1 Momenti, funzione caratteristica e funzione generatrice . . . 83
7.1.2 Cambiamento di variabile casuale . . . 84
7.1.3 Applicazione: il rapporto di due variabili casuali indipendenti . . . 85
7.1.4 Applicazione: il decadimento debole della Λ^0 . . . 86
7.1.5 Applicazione: il decadimento debole K^0_{e3} . . . 87
7.1.6 Ancora sui valori estremi di un campione . . . 87
7.2 Cenni sulle variabili casuali in più di due dimensioni . . . 88

8 Esempi di distribuzioni teoriche **93**
8.1 La distribuzione uniforme . . . 93
8.1.1 Applicazione: decadimento del π^0 . . . 94
8.1.2 Applicazione: generazione di numeri casuali con distribuzione data . . . 96
8.1.3 Esempio: valori estremi di un campione di dati a distribuzione uniforme . . . 99
8.2 La distribuzione normale . . . 101
8.3 La distribuzione di Cauchy . . . 104
8.3.1 Il rapporto di due variabili normali . . . 107
8.4 La distribuzione di Bernoulli . . . 108
8.4.1 Applicazione: decadimenti radioattivi . . . 113
8.4.2 Applicazione: il rapporto di asimmetria . . . 114
8.4.3 La distribuzione binomiale negativa . . . 115
8.5 La distribuzione di Poisson . . . 116
8.5.1 Applicazione: esperimenti "negativi" . . . 122
8.5.2 Applicazione: ancora il rapporto di asimmetria . . . 122
8.5.3 La distribuzione esponenziale . . . 124
8.5.4 La distribuzione di Erlang . . . 126
8.5.5 La distribuzione composta di Poisson . . . 128
8.5.6 Esempio: l'osservazione di un quark isolato . . . 129
8.5.7 Applicazione: segnale e fondo . . . 130
8.6 La distribuzione log-normale . . . 132
8.7 La distribuzione normale in più dimensioni . . . 135

9 La legge di Gauss **141**
9.1 La funzione di Gauss . . . 141
9.2 Proprietà della legge normale . . . 142
9.3 Lo scarto normalizzato . . . 146

9.4 Il significato geometrico di σ 149
9.5 La curva di Gauss nella pratica 149
9.6 Esame dei dati 152
9.7 Sommario delle misure dirette 153
9.8 Il teorema del limite centrale 154
9.8.1 Applicazione: numeri casuali normali 157

10 Le misure indirette 161
10.1 Risultato della misura 161
10.2 Combinazioni lineari di misure dirette 163
10.3 La formula di propagazione degli errori 164
10.4 Errore dei prodotti di potenze 165
10.5 Errori massimi 166

11 Stime di parametri 167
11.1 Stime e loro caratteristiche 167
11.2 La stima di massima verosimiglianza 170
11.2.1 Un esempio di stima sufficiente 173
11.3 Media pesata 175
11.4 Interpolazione dei dati con una curva 178
11.4.1 Interpolazione lineare per due variabili 179
11.4.2 Stima a posteriori degli errori di misura 183
11.4.3 Interpolazione con una retta per l'origine 184
11.4.4 Interpolazione lineare nel caso generale 186
11.4.5 Interpolazione non lineare 188
11.5 Altre applicazioni della stima di massima verosimiglianza . 188
11.5.1 Stima di probabilità 188
11.5.2 Media e varianza di una popolazione normale 190
11.5.3 Range di una popolazione uniforme 191
11.5.4 Stima della vita media di una particella 192

12 La verifica delle ipotesi (I) 195
12.1 La distribuzione del χ^2 195
12.2 Verifiche basate sulla distribuzione del χ^2 203
12.2.1 Compatibilità dei dati con una distribuzione 203
12.2.2 Il metodo del minimo χ^2 205
12.2.3 Test di omogeneità per dati raggruppati 210
12.2.4 Un esempio: diffusione elastica protone-protone . . . 212
12.3 Compatibilità con un valore prefissato 214
12.4 I piccoli campioni e la distribuzione di Student 217
12.5 La compatibilità di due valori misurati 220

12.6 La distribuzione di Fisher 222
12.6.1 Confronto tra varianze 224
12.7 Il metodo di Kolmogorov e Smirnov 225

13 La verifica delle ipotesi (II) 227
13.1 Un primo esempio 229
13.2 Il lemma di Neyman–Pearson 232
13.3 Tests di massima potenza uniforme 234
13.4 Il rapporto delle massime verosimiglianze 235
13.5 Applicazione: ipotesi sulle probabilità 238
13.6 Applicazione: valore medio di una popolazione normale . . . 240

A Cenni di calcolo combinatorio 243
A.1 Il lemma fondamentale del calcolo combinatorio 243
A.2 Fattoriale di un numero intero 244
A.3 Disposizioni 244
A.4 Permutazioni 245
A.5 Permutazioni con ripetizione 245
A.6 Combinazioni 245
A.7 Partizioni ordinate 246

B L'errore della varianza 249

C Covarianza e correlazione 255
C.1 La covarianza 255
C.2 La correlazione lineare 259
C.3 Propagazione degli errori per variabili correlate 261
C.4 Applicazioni all'interpolazione lineare 262
C.4.1 Riscrittura delle equazioni dei minimi quadrati 262
C.4.2 Verifica di ipotesi sulla correlazione lineare 264
C.4.3 La correlazione tra i coefficienti della retta 265
C.4.4 Stima puntuale mediante l'interpolazione lineare . . 267
C.4.5 Verifica di ipotesi nell'interpolazione lineare 268
C.4.6 Adeguatezza dell'interpolazione lineare o polinomiale in genere 269
C.4.7 Il *run test* per i residui 270
C.5 Applicazioni alla stima di parametri 274

D Il modello di Laplace e la funzione di Gauss 277

E La funzione di verosimiglianza 283

F La licenza GNU GPL (General Public License) 293
F.1 The GNU General Public License 293
F.2 Licenza pubblica generica del progetto GNU 301

G Tabelle 311

H Bibliografia 323

Indice analitico 327

Elenco delle figure

4a Istogramma di un campione di misure 32
4b Frequenza cumulativa relativa di un campione di misure . . 34
4c Distribuzioni unimodali, bimodali e amodali 36
4d La distribuzione di Maxwell–Boltzmann 39

6a Il comportamento limite delle frequenze relative 66

8a Le aree elementari sulla superficie di una sfera di raggio R . 95
8b Il metodo dei rigetti — esempio 97
8c La distribuzione normale standardizzata 101
8d La distribuzione di Cauchy 105
8e La distribuzione binomiale 110
8f La distribuzione di Poisson 120
8g Limiti superiori sul segnale in presenza di fondo noto 132
8h La distribuzione log-normale 134
8i Funzione normale bidimensionale 135
8j Funzione normale bidimensionale (curve di livello) 136
8k Funzione normale bidimensionale (probabilità condizionate) 137

9a Dipendenza da h della distribuzione di Gauss 143
9b Istogrammi di dati con differente precisione 148

11a Stime consistenti ed inconsistenti, imparziali e deviate 169

12a La distribuzione del χ^2 197
12b La funzione di distribuzione del χ^2 206
12c La funzione di distribuzione del χ^2 ridotto 207
12d Urto elastico protone-protone. 212
12e La distribuzione di Student 218

13a Un esempio: errori di prima e seconda specie 231

C1 Esempio di interpolazione lineare per un insieme di 12 punti. 271

Prefazione

Quando ho cominciato a tenere uno dei due corsi di Esperimentazioni di Fisica I (per il primo anno del Corso di Laurea in Fisica), ormai molti anni fa, non sono riuscito a trovare un libro di testo in cui fosse contenuto, della materia, tutto quello che io ritenevo fosse necessario per la formazione di uno studente che si supponeva destinato alla carriera del fisico; e, dopo aver usato per qualche tempo varie dispense manoscritte, mi sono deciso a riunirle in un testo completo in cui la materia fosse organicamente esposta.

Per giungere a questo è stato fondamentale l'aiuto datomi dal docente dell'altro corso parallelo di Esperimentazioni, il Prof. Sergio Ciampolillo, senza il quale questo libro non sarebbe probabilmente mai venuto alla luce; e tanto più caro mi è stato questo suo aiuto in quanto lui stesso mi aveva insegnato nel passato la statistica, completa di tutti i crismi del rigore matematico ma esposta con la mentalità di un fisico e mirata ai problemi dei fisici, nei lontani anni in cui frequentavo la Scuola di Perfezionamento (a quel tempo il Dottorato di Ricerca non era ancora nato).

Assieme abbiamo deciso l'impostazione da dare al testo e, nel 1987, preparata la prima edizione; che era ciclostilata, e che veniva stampata e distribuita a prezzo di costo agli studenti a cura dello stesso Dipartimento di Fisica. Il contenuto è stato poi più volte ampliato e rimaneggiato da me (e, all'inizio, ancora dal Prof. Ciampolillo: che ha partecipato a tutte le successive edizioni fino alla quarta compresa); dalla seconda alla quarta edizione, poi, il testo è stato edito a cura della Libreria Progetto.

L'esposizione della materia è vincolata dalla struttura del corso: un testo organico dovrebbe ad esempio presentare dapprima la probabilità e poi la statistica; ma gli studenti entrano in laboratorio sin dal primo giorno, e fanno delle misure che devono pur sapere come organizzare e come trattare per estrarne delle informazioni significative. Così si è preferito parlare subito degli errori di misura e dell'organizzazione dei dati, per poi dimostrare soltanto

alla fine (quando tutta la matematica necessaria è stata alfine esposta) alcune delle assunzioni fatte; si veda a tale proposito l'esempio della media aritmetica, che gli studenti adoperano fin dal primo giorno ma il cui uso viene del tutto giustificato soltanto nel paragrafo 11.3 di questo libro.

Questo testo non contiene soltanto materia oggetto di studio nel primo anno del Corso di Laurea: su richiesta di docenti degli anni successivi, nel passato erano state aggiunte alcune parti (collocate tra le appendici) che potessero loro servire come riferimento. Ho poi largamente approfittato, sia dell'occasione offertami dall'uscita di questa quinta edizione che del fatto di dover tenere anche un corso di Statistica per la Scuola di Dottorato in Fisica, per includere nel testo degli argomenti di teoria assiomatica della probabilità e di statistica teorica che vanno assai più avanti delle esigenze di uno studente del primo anno: questo perché se, negli anni successivi, le necessità dell'analisi spingeranno dei fisici ad approfondire dei particolari argomenti di statistica, queste aggiunte sono sicuramente le basi da cui partire.

Ho cercato insomma di trasformare un testo ad uso specifico del corso di Esperimentazioni di Fisica I in una specie di riferimento base per la statistica e l'analisi dei dati: per questo anche il titolo è cambiato, e "Introduzione alle Esperimentazioni di Fisica I" è diventato un più ambizioso "Introduzione alla Fisica Sperimentale"; e "Teoria degli errori e analisi dei dati" un più veritiero "Teoria degli Errori e Fondamenti di Statistica". Ma, anche se le nuove aggiunte (addirittura per un raddoppio complessivo del contenuto originale) sono mescolate alle parti che utilizzo nel corso, ho cercato di far sì che queste ultime possano essere svolte indipendentemente dalla conoscenza delle prime.

Può stupire invece che manchi una parte di descrizione e discussione organica delle esperienze svolte e degli strumenti usati: ma gli studenti, come parte integrante del corso, devono stendere delle relazioni scritte sul loro operato che contengano appunto questi argomenti; e si è preferito evitare che trovassero già pronto un riferimento a cui potessero, per così dire, ispirarsi.

Maurizio Loreti

Gennaio 1998
(Quinta edizione)

Prefazione alla sesta edizione

Gli anni sono passati, e non ho mai smesso di modificare questo testo: per prima cosa ho corretto gli errori segnalati dai colleghi e dagli studenti, ed ho sfruttato parecchi dei loro consigli. Poi ho aggiunto nuovi paragrafi: sia per descrivere distribuzioni teoriche che, sia pur poco usate nella Fisica, ogni tanto vi compaiono; sia per introdurre piccoli esempi ed applicazioni giocattolo usati nel tenere per la seconda volta un corso di Statistica alla Scuola di Dottorato in Fisica.

Come conseguenza, questo testo è a parer mio parecchio migliorato rispetto a quello pubblicato nel 1998 dalla Decibel-Zanichelli; purtroppo le scarse vendite hanno indotto la casa editrice a rinunciare ad una seconda edizione che seguisse la prima. Conseguentemente ho deciso di mettere nella sua forma attuale (la "sesta edizione") questo libro a disposizione della comunità su Internet: sperando che possa ancora servire a qualcuno. La licenza è quella GPL, inclusa nella appendice F; in sostanza è permesso modificare a piacimento e ridistribuire in qualunque forma questo libro, purché la ridistribuzione comprenda il sorgente.

Un'ultima considerazione personale: adesso il Corso di Laurea in Fisica è articolato in "tre più due" anni di studio; ed è con un certo piacere che ho visto come tutti gli studenti che hanno preparato con noi, sui dati dell'esperimento CDF, le loro tesi di laurea di primo livello abbiano potuto trovare aiuto in queste pagine per completarle, usando ad esempio sia metodi di verifica delle ipotesi basati sul rapporto delle funzioni di verosimiglianza che il test di Kolmogorov e Smirnov.

Maurizio Loreti

Dicembre 2006
(Sesta edizione)

"Where shall I begin, please, your Majesty?" he asked.
"Begin at the beginning," the King said, gravely,
"and go on till you come to the end: then stop."

Charles L. Dodgson (Lewis Carroll)
Alice in Wonderland (1865)

Capitolo 1

Introduzione

Scopo della Fisica è lo studio dei fenomeni naturali, dei quali essa cerca per prima cosa di dare una descrizione; che deve essere non solo qualitativa, ma soprattutto *quantitativa*. Questo richiede di individuare, all'interno del fenomeno, quelle grandezze fisiche in grado di caratterizzarlo univocamente; e di ottenere, per ognuna di esse, i valori che si sono presentati in un insieme significativo di casi reali. Lo studio si estende poi *oltre* la semplice descrizione, e deve comprendere l'indagine sulle relazioni reciproche tra più fenomeni, sulle cause che li producono e su quelle che ne determinano le modalità di presentazione. Fine ultimo di tale ricerca è quello di formulare delle *leggi fisiche* che siano in grado di dare, del fenomeno in esame, una descrizione razionale, quantitativa e (per quanto possibile) completa; e che permettano di dedurre univocamente le caratteristiche con cui esso si verificherà dalla conoscenza delle caratteristiche degli altri fenomeni che lo hanno causato (o che comunque con esso interagiscono).

Oggetto quindi della ricerca fisica devono essere delle *grandezze misurabili*; enti che cioè possano essere caratterizzati dalla valutazione quantitativa di alcune loro caratteristiche, suscettibili di variare da caso a caso a seconda delle particolari modalità con cui il fenomeno studiato si svolge[1].

[1] Sono *grandezze misurabili* anche quelle connesse a oggetti non direttamente osservabili, ma su cui possiamo indagare attraverso lo studio delle influenze prodotte dalla loro presenza sull'ambiente che li circonda. Ad esempio i *quarks*, costituenti delle particelle elementari dotate di interazione forte, secondo le attuali teorie per loro stessa natura non potrebbero esistere isolati allo stato libero; le loro caratteristiche (carica, spin etc.) non sono quindi direttamente suscettibili di misura: ma sono ugualmente oggetto della ricerca fisica, in quanto sono osservabili e misurabili i loro effetti al di fuori della particella entro la quale i quarks sono relegati.

1.1 Il metodo scientifico

Il linguaggio usato dal ricercatore per la formulazione delle leggi fisiche è il *linguaggio matematico*, che in modo naturale si presta a descrivere le relazioni tra i dati numerici che individuano i fenomeni, le loro variazioni ed i loro rapporti reciproci; il procedimento usato per giungere a tale formulazione è il *metodo scientifico*, la cui introduzione si fa storicamente risalire a Galileo Galilei. Esso può essere descritto distinguendone alcune fasi successive:

- Una fase *preliminare* in cui, basandosi sul bagaglio delle conoscenze precedentemente acquisite, si determinano sia le grandezze rilevanti per la descrizione del fenomeno che quelle che presumibilmente influenzano le modalità con cui esso si presenterà.

- Una fase *sperimentale* in cui si compiono osservazioni accurate del fenomeno, controllando e misurando sia le grandezze che lo possono influenzare sia quelle caratteristiche quantitative che lo individuano e lo descrivono, mentre esso viene causato in maniera (per quanto possibile) esattamente riproducibile; ed in questo consiste specificatamente il lavoro dei fisici sperimentali.

- Una fase di *sintesi* o congettura in cui, partendo dai dati numerici raccolti nella fase precedente, si inducono delle relazioni matematiche tra le grandezze misurate che siano in grado di render conto delle osservazioni stesse; si formulano cioè delle leggi fisiche ipotetiche, controllando se esse sono in grado di spiegare il fenomeno.

- Una fase *deduttiva*, in cui dalle ipotesi formulate si traggono tutte le immaginabili conseguenze: particolarmente la previsione di fenomeni non ancora osservati (almeno non con la necessaria precisione); e questo è specificatamente il compito dei fisici teorici.

- Infine una fase di *verifica* delle ipotesi prima congetturate e poi sviluppate nei due passi precedenti, in cui si compiono ulteriori osservazioni sulle nuove speculazioni della teoria per accertarne l'esattezza.

Se nella fase di verifica si trova rispondenza con la realtà, l'ipotesi diviene una legge fisica accettata; se d'altra parte alcune conseguenze della teoria non risultano confermate, e non si trovano spiegazioni delle discrepanze tra quanto previsto e quanto osservato nell'ambito delle conoscenze acquisite, la legge dovrà essere modificata in parte, o rivoluzionata completamente per

essere sostituita da una nuova congettura; si ritorna cioè alla fase di sintesi, e l'evoluzione della scienza comincia un nuovo ciclo.

Naturalmente, anche se non si trovano contraddizioni con la realtà ciò non vuol dire che la legge formulata sia esatta: è possibile che esperimenti effettuati in condizioni cui non si è pensato (o con strumenti di misura più accurati di quelli di cui si dispone ora) dimostrino in futuro che le nostre congetture erano in realtà sbagliate; come esempio, basti pensare alla legge galileiana del moto dei corpi ed alla moderna teoria della relatività.

È evidente quindi come le fasi di indagine e di verifica sperimentale costituiscano parte fondamentale dello studio dei fenomeni fisici; scopo di questo corso è quello di presentare la teoria delle misure e degli errori ad esse connessi.

Capitolo 2

La misura

Ad ogni grandezza fisica si deve, almeno in linea di principio, poter associare un valore numerico in modo *univoco* ed *oggettivo*, cioè riproducibile nelle stesse condizioni da qualsiasi osservatore; valore pari al rapporto fra la grandezza stessa e l'unità di misura per essa prescelta.

Per eseguire tale associazione dobbiamo disporre di strumenti e metodi che ci permettano di mettere in relazione da una parte la grandezza da misurare, e dall'altra l'unità di misura (oppure suoi multipli o sottomultipli); e ci dicano se esse sono uguali o, altrimenti, quale delle due è maggiore.

2.1 Misure dirette e misure indirette

La misura si dice *diretta* quando si confronta direttamente la grandezza misurata con l'unità di misura (*campione*) o suoi multipli o sottomultipli; come esempio, la misura di una lunghezza mediante un regolo graduato è una misura diretta.

È una misura diretta anche quella effettuata mediante l'uso di *strumenti pretarati* (ad esempio la misura della temperatura mediante un termometro), che si basa sulla proprietà dello strumento di reagire sempre nella stessa maniera quando viene sottoposto alla medesima sollecitazione.

Misure *indirette* sono invece quelle in cui non si misura la grandezza che interessa, ma altre che risultino ad essa legate da una qualche relazione funzionale; così la velocità di un'automobile può essere valutata sia direttamente (con il tachimetro) sia indirettamente: misurando spazi percorsi e tempi

impiegati, dai quali si risale poi alla velocità (media) con una operazione matematica.

2.2 Le unità di misura

Le grandezze fisiche si sogliono dividere in *fondamentali* e *derivate*. Con il primo di questi nomi si indicavano, originariamente, quelle grandezze misurate con strumenti e metodi sperimentali che richiedessero un confronto diretto con un campione, scelto arbitrariamente come unità di misura; mentre le seconde venivano generalmente determinate in modo indiretto, ovverosia (come appena detto) attraverso misure dirette di altre grandezze ad esse legate da relazioni algebriche: che permettevano non solo di calcolarne i valori, ma ne fissavano nel contempo anche le unità di misura.

In questo modo si sono definiti vari sistemi di misura coerenti, come il Sistema Internazionale (**SI**) attualmente in uso: esso assume come grandezze fondamentali lunghezza, massa, tempo, intensità di corrente elettrica, temperatura, intensità luminosa e quantità di materia; con le rispettive unità metro, chilogrammo, secondo, Ampère, grado Kelvin, candela e mole. Le unità per la misura delle altre grandezze sono poi univocamente determinate dalle relazioni algebriche che le legano a quelle fondamentali.

Se ciascuna unità fondamentale viene ridotta di un certo fattore, il valore della grandezza espresso nelle nuove unità dovrà essere moltiplicato per un prodotto di potenze dei medesimi fattori. Così, per restare nell'ambito della meccanica, se riduciamo l'unità di lunghezza di un fattore L, l'unità di massa di un fattore M e quella di tempo di un fattore T, ed il valore di una grandezza fisica ne risultasse in conseguenza moltiplicato per

$$L^{\lambda} M^{\mu} T^{\tau} \quad ,$$

si dirà che la grandezza in questione ha le *dimensioni* di una lunghezza elevata alla potenza λ per una massa elevata alla potenza μ per un tempo elevato alla potenza τ.

Pensiamo alla velocità (media) di un corpo in movimento, che è definita come il rapporto tra lo spazio da esso percorso in un certo intervallo di tempo e la durata di tale intervallo: ed è dunque una grandezza derivata. Una volta scelte le unità di misura delle lunghezze e dei tempi (per esempio il metro ed il secondo), l'unità di misura delle velocità risulta fissata univocamente (metro al secondo).

Se si alterano ad esempio l'unità di lunghezza moltiplicandola per un fattore $1/L = 1000$ (chilometro), quella di tempo moltiplicandola per un fattore $1/T = 3600$ (ora) e quella di massa moltiplicandola per un fattore

$1/M = 1000$ (tonnellata), il valore di qualunque velocità nella nuova unità (chilometro all'ora) risulterà alterato rispetto al precedente di un fattore

$$L^1 M^0 T^{-1} = L T^{-1}$$

e si dice pertanto che le dimensioni fisiche di una velocità sono quelle di una lunghezza divisa per un tempo.

Come altro esempio si consideri l'energia cinetica di un corpo, definita come il lavoro compiuto dalla forza che si deve applicare per arrestarlo; e che è pari numericamente alla metà del prodotto della massa per il quadrato della velocità del corpo stesso:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad .$$

Essa è pertanto una grandezza derivata, la cui unità di misura nel Sistema Internazionale è l'energia cinetica di un corpo avente massa di 2 Kg ed in moto traslatorio con velocità di 1 m/s (unità detta *joule*). Passando al nuovo sistema di unità prima definito (assai inconsueto per un'energia), il valore di K risulta moltiplicato per il fattore $M^1 L^2 T^{-2}$; si dice dunque che un'energia ha le dimensioni di una massa, moltiplicata per il quadrato di una lunghezza e divisa per il quadrato di un tempo.

Queste proprietà di trasformazione sono legate alla cosiddetta *analisi dimensionale* ed alla *similitudine meccanica*, argomenti che esulano da questo corso. Basti qui osservare che il numero di unità indipendenti non coincide necessariamente con quello delle grandezze assunte come "fondamentali"; così l'angolo piano e l'angolo solido sono entrambi privi di dimensioni in termini di grandezze fisiche fondamentali, e come tali dovrebbero avere come unità di misura derivata (1 m/1 m e rispettivamente 1 m^2/1 m^2) lo stesso "numero puro" 1, mentre esistono per essi due diverse unità: il radiante e lo steradiante, quasi essi avessero dimensioni proprie e distinte.

Né vi è alcunché di necessario nella scelta delle grandezze fondamentali quale si è venuta configurando storicamente nel Sistema Internazionale, potendosi definire un sistema coerente anche con l'assegnazione di valori convenzionali alle costanti universali delle leggi fisiche (come proposto agli inizi del secolo da Max Planck): così un sistema di unità "naturali" si potrebbe fondare, in linea di principio, ponendo uguali ad 1 la velocità della luce nel vuoto, il quanto d'azione (o costante di Planck), la costante di gravitazione universale, la costante di Boltzmann ed il quanto elementare di carica elettrica (ovverosia la carica dell'elettrone). Ma, a parte considerazioni di opportunità e consuetudine, ciò che determina in ultima analisi fino a che punto si possa tradurre in pratica un simile programma, e quali grandezze

siano quindi da considerare fondamentali, è la riproducibilità dei campioni e la precisione con cui è possibile il confronto diretto tra grandezze omogenee.

È emblematica a questo riguardo la storia dell'evoluzione delle unità di misura delle lunghezze: queste anticamente erano riferite a parti del corpo umano quali il braccio, il cubito (già usato dagli Egizi), il piede e la larghezza del pollice; ovvero delle medie di tali lunghezze su di un numero limitato di individui. L'ovvio vantaggio di una simile definizione è la disponibilità del campione in ogni tempo e luogo; l'altrettanto ovvio svantaggio è la grande variabilità del campione stesso, donde il ricorso dapprima a valori medi ed infine a campioni artificiali costruiti con materiali e accorgimenti che garantissero una minima variabilità della loro lunghezza, col tempo e con le condizioni esterne più o meno controllabili.

Così, dopo la parentesi illuministica che portò all'adozione della quarantamilionesima parte del meridiano terrestre quale unità di lunghezza (metro), e fino al 1960, il metro campione fu la distanza tra due tacche tracciate su di un'opportuna sezione di una sbarra costruita usando una lega metallica molto stabile; tuttavia le alterazioni spontanee della struttura microcristallina della sbarra fanno sì che diversi campioni, aventi la medesima lunghezza alla costruzione, presentino con l'andar del tempo differenze apprezzabili dai moderni metodi di misura. Inoltre l'uso di metodi ottici interferenziali finì per consentire un confronto più preciso delle lunghezze, e condusse nel 1960 (come suggerito da Babinet già nel 1829!) a svincolare la definizione del metro dalla necessità di un supporto materiale macroscopico, col porlo uguale a 1˙650˙763.73 volte l'effettivo campione: cioè la lunghezza d'onda nel vuoto della luce emessa, in opportune condizioni, da una sorgente atomica (riga arancione dell'isotopo del Kripton ^{86}Kr).

L'ulteriore rapido sviluppo della tecnologia, con l'avvento di laser molto stabili e di misure accuratissime delle distanze planetarie col metodo del radar, ha condotto recentemente (1984) ad una nuova definizione del metro, come distanza percorsa nel vuoto dalla luce in una determinata frazione (1/299˙792˙458) dell'unità di tempo (secondo); il che equivale ad assumere un valore convenzionale per il campione di velocità (la velocità della luce nel vuoto) ed a ridurre la misura della lunghezza fondamentale ad una misura di tempo. È implicita nella definizione anche la fiducia nell'indipendenza della velocità della luce nel vuoto sia dal sistema di riferimento dell'osservatore che dal "tipo" di luce (frequenza, stato di polarizzazione e così via); ipotesi queste che sono necessarie conseguenze delle moderne teorie della fisica.

Le misure di lunghezza hanno dunque percorso l'intero arco evolutivo, ed appare evidente come la complessa realtà metrologica odierna non sia più riflessa esattamente nella classificazione tradizionale di grandezze "fondamentali" e "derivate". Infatti la velocità assume ora in un certo senso il ruolo di grandezza fondamentale, e tuttavia una velocità non si misura praticamente mai per confronto diretto col campione (la velocità della luce nel vuoto); per converso le lunghezze sono spesso ancora oggi misurate per confronto con campioni, ma la lunghezza del campione primario (il metro) è a sua volta determinata da una misura di tempo.

Per quanto riguarda l'unità di durata temporale, essa fu svincolata da un supporto macroscopico (il moto diurno della terra o i moti planetari) nel 1964 con l'adozione di un campione di frequenza atomico (in termini imprecisi il cosiddetto "orologio atomico al Cesio"), assegnando il valore convenzionale di 9˙192˙631˙770 cicli al secondo (hertz) alla frequenza della radiazione elettromagnetica emessa in una particolare transizione tra due stati quantici dell'atomo di ^{133}Cs.

Questa definizione del minuto secondo consente il confronto di intervalli di tempo con un errore relativo[1] inferiore ad una parte su 10^{13}. Se si considera che il quanto d'azione $\hbar$, che è la costante universale della meccanica (quantistica) determinata con maggior precisione dopo la velocità della luce nel vuoto e che sia da essa indipendente, è noto soltanto con una incertezza dell'ordine di 0.2 parti per milione[2], si comprende quale iato si dovrebbe colmare per portare a compimento il programma di Planck anche con il tempo, così come lo si è realizzato per la lunghezza.

Ad uno stadio ancora meno avanzato è giunta l'evoluzione delle misure di massa, il cui campione è tuttora costituito da un particolare oggetto macroscopico detto "chilogrammo-campione". Anche qui la precisione con cui si possono confrontare le masse supera di vari ordini di grandezza quella con cui è nota la costante di gravitazione universale, cui l'attribuzione di un valore convenzionale consentirebbe di ridurre le misure di massa a quelle di tempo e di lunghezza.

2.3 Gli strumenti di misura

Lo strumento di misura è un apparato che permette il confronto tra la grandezza misurata e l'unità prescelta. Esso è costituito da un oggetto sensibile in qualche modo alla grandezza da misurare, che si può chiamare *rivelatore*; eventualmente da un dispositivo *trasduttore*, che traduce le variazioni della grandezza caratteristica del rivelatore in quelle di un'altra grandezza più facilmente accessibile allo sperimentatore; e da un dispositivo *indicatore*

[1] Vedi il paragrafo 2.6 alla fine del corrente capitolo.

[2] Attualmente (2004), l'errore relativo sul valore comunemente usato di $\hbar$ (e che vale $1.054˙571˙68 \times 10^{-34}$ J s) è di 1.7×10^{-7}.

che presenta il risultato della misura ai sensi (generalmente alla vista) dello sperimentatore: o direttamente o mediante una registrazione, grafica o di altro genere.

Così in un *calibro*, strumento per la misura di spessori, il rivelatore è costituito dalla ganascia mobile col cursore ad essa solidale, e che può scorrere nella guida facente corpo unico con la ganascia fissa; mentre l'elemento indicatore è costituito dalla scala graduata in millimetri tracciata sulla guida e dal segno di fede inciso sul cursore, a sua volta generalmente collegato ad una scala graduata ausiliaria (*nonio*) per la lettura delle frazioni di millimetro. La grandezza letta sulla scala è qui direttamente lo spessore oggetto della misura.

In un *termometro* a liquido l'elemento sensibile alla temperatura è il liquido contenuto nel bulbo; esso funge almeno in parte anche da trasduttore, perché la proprietà termometrica che viene usata è il volume del rivelatore stesso. Il tubo capillare a sezione costante traduce le variazioni di volume del rivelatore in variazioni di lunghezza della colonna di liquido ivi contenuta; il menisco che separa il liquido dal suo vapore nel capillare funge da indicatore, assieme con la scala tracciata sulla superficie esterna del tubo stesso o sopra un regolo ad essa solidale. La grandezza letta sulla scala è la distanza del menisco da un segno di riferimento che può essere messa in corrispondenza con la temperatura per mezzo di una tabella di conversione; oppure, più spesso e comodamente, le temperature corrispondenti sono scritte sulla scala stessa accanto alle tacche della graduazione.

Le caratteristiche più importanti di uno strumento sono le seguenti:

- La *prontezza*: è determinata dal tempo necessario perché lo strumento risponda in modo completo ad una variazione della sollecitazione; ad esempio, per avere una risposta corretta da un termometro si deve attendere che si raggiunga l'equilibrio termico tra il rivelatore e l'oggetto di cui si misura la temperatura.

- L'*intervallo d'uso*: è definito come l'insieme dei valori compresi tra la *soglia* e la *portata* dello strumento, cioè tra il minimo ed il massimo valore della grandezza che lo strumento può apprezzare in un singolo atto di misura.

- La *sensibilità*: si può definire come il reciproco della incertezza di lettura propria dello strumento, cioè della più piccola variazione della grandezza che può essere letta sulla scala, e che si assume generalmente corrispondente alla più piccola divisione della scala stessa (o ad una frazione apprezzabile di questa). La sensibilità può essere diversa in differenti punti della scala, o per diversi valori della grandezza; è un fattore che limita l'intervallo d'uso dello strumento, potendo divenire insufficiente al di sotto della soglia od al di sopra della portata.

- La *precisione* dello strumento: è legata alla riproducibilità del risultato della misura di una stessa grandezza. Esso può variare da una parte per difetti dello strumento dovuti alla costruzione, che non può mai essere perfetta, e per il logoramento di alcune componenti in conseguenza dell'uso prolungato o improprio, o dell'invecchiamento; e, inoltre, per la presenza di varie cause di disturbo ineliminabili anche in condizioni normali d'uso dello strumento stesso.

  Tutto questo fa sì che misure ripetute di una stessa grandezza fisica si distribuiscano in un intervallo più o meno ampio; la precisione si può definire come il reciproco dell'incertezza sul valore della grandezza che viene determinata dall'insieme di questi fattori: ed è sostanzialmente legata all'entità degli *errori casuali*, di cui parleremo tra poco nel paragrafo 2.4.

- L'*accuratezza* dello strumento; ossia la sua capacità di fornire valori corrispondenti a quello realmente posseduto dalla grandezza in esame. In altre parole, se lo strumento è accurato ci si aspetta che i risultati di misure ripetute della stessa grandezza fisica siano equamente distribuiti in un intorno del valore vero; questa caratteristica degli strumenti sarà, come vedremo, legata alla presenza di *errori sistematici* da essi introdotti (di questi, e delle loro possibili cause parleremo sempre nel paragrafo 2.4).

  Ci si attende da uno sperimentatore serio che sappia individuare le cause di scarsa accuratezza nei suoi strumenti (ad esempio un'errata taratura dello zero della scala) ed in qualche modo neutralizzarle; così da ricondursi, in ogni caso, a *risultati accurati*.

Per sfruttare a pieno le possibilità di uno strumento di misura, è opportuno che la sensibilità non sia troppo inferiore alla precisione; gli strumenti di uso corrente sono costruiti con una sensibilità circa uguale alla precisione in condizioni normali d'uso.

Anche se, per questo motivo, generalmente la sensibilità e la precisione in uno strumento hanno valori simili, fate attenzione a non confondere i due concetti: la sensibilità è una caratteristica intrinseca degli strumenti, e rimane perciò costante in ogni situazione; mentre la precisione delle nostre misure dipende, è vero, dal tipo di strumento usato (e quindi dalla sua sensibilità) — ma anche dalle modalità contestuali di impiego e dal tipo di grandezza misurata.

Così su un orologio nella cui scala non siano riportate che poche divisioni (l'inverso della sensibilità sia ad esempio di 60 o 15 minuti) non è difficile stimare l'ora con una approssimazione che invece è dell'ordine di pochi minuti; mentre un cronometro in grado di apprezzare il decimillesimo di secondo, se azionato a mano, difficilmente può raggiungere una precisione inferiore al decimo.

Similmente, un regolo lungo un metro e graduato al millimetro può essere usato per valutare le dimensioni di un quaderno (con un singolo atto di misura); oppure (riportandolo varie volte di seguito a se stesso) le dimensioni di un edificio. È evidente come, pur essendo lo strumento lo stesso (quindi la sensibilità non varia) la precisione delle misure debba essere completamente diversa nei due casi.

2.4 Errori di misura

Come già accennato in relazione alla precisione di uno strumento, se si esegue una misura di una qualsiasi grandezza fisica si commettono inevitabilmente errori; conseguentemente il valore ottenuto per la grandezza misurata non è mai esattamente uguale al suo vero valore, che non ci potrà perciò mai essere noto con precisione arbitrariamente grande (diversamente da quanto accade con una costante matematica, come ad esempio π).

Quando si ripete la misura della stessa grandezza col medesimo strumento, nelle medesime condizioni e seguendo la medesima procedura, la presenza delle varie cause di errore (che andremo tra poco ad esaminare) produce delle differenze casuali tra il valore misurato ed il valore vero; differenze variabili da una misura all'altra, ed in modo imprevedibile singolarmente. In conseguenza di ciò, i risultati di queste misure ripetute (se lo strumento è abbastanza sensibile) fluttueranno apprezzabilmente in maniera casuale in un certo intervallo: la cui ampiezza definirà la precisione delle misure stesse. Gli errori di questo tipo si dicono *errori casuali*, e la loro esistenza è facilmente accertabile con l'uso di un qualsiasi strumento sensibile.

Tuttavia, certe cause di errore possono dar luogo a una discrepanza tra valore misurato e valore vero che si riproduce inalterata in una serie di misure ripetute: e la inosservabilità delle fluttuazioni non garantisce affatto che tale discrepanza sia inferiore all'incertezza di lettura dello strumento; né si può esser certi che essa sia contenuta entro l'intervallo di variabilità degli errori casuali (quando esso sia maggiore dell'incertezza di lettura).

Gli errori di questo secondo tipo si dicono *errori sistematici* e sono i più insidiosi, perché non risultano immediatamente identificabili. Cause di

errori sistematici possono essere quelle elencate nel seguito (ma la lista non è necessariamente completa):

1. *Difetti dello strumento, risalenti alla costruzione o conseguenti al suo deterioramento.* Ad esempio, in una bilancia con bracci di lunghezza diversa, l'uguaglianza dei momenti applicati ai due bracci ed assicurata dall'equilibrio del giogo non implica l'uguaglianza delle masse ad essi sospese: perché una massa minore sospesa al braccio più lungo produrrà una azione atta ad equilibrare quella esercitata da una massa maggiore sospesa all'altro (questo errore si potrebbe anche classificare nel tipo 6, cioè come errore di interpretazione del risultato).

   Un altro esempio è quello di un goniometro *eccentrico*, cioè avente la croce centrale o l'asse di rotazione in posizione diversa da quella del centro del cerchio recante la graduazione: ciò determina come conseguenza misure di angoli acuti sistematicamente errate per difetto o per eccesso a seconda della posizione del centro presunto rispetto agli assi 0°–180° e 90°–270° del goniometro.

   Lo zero di una scala (ad esempio di un termometro) può essere spostato dalla posizione corretta di taratura, per cui tutte le letture saranno in difetto o in eccesso a seconda del verso di tale spostamento. Oppure la scala stessa dello strumento può essere difettosa: così, se il capillare di un termometro non ha sezione costante, anche se le posizioni corrispondenti a due punti fissi come 0°C e 100°C fossero esatte, le temperature lette risulterebbero in difetto in un tratto della scala ed in eccesso in un altro tratto.

2. *Uso dello strumento in condizioni errate*, cioè diverse da quelle previste per il suo uso corretto. Tale è l'uso di regoli, calibri e simili strumenti per misurare le lunghezze, o di recipienti tarati per la misura dei volumi, a temperature diverse da quella di taratura (generalmente fissata a 20°C); infatti la dilatazione termica farà sì che lunghezze e volumi risultino alterati, in difetto o in eccesso a seconda che si operi a temperatura superiore o inferiore.

   Si può naturalmente commettere un errore anche usando lo strumento a 20°C, quando ciò che interessa in realtà è conoscere il valore di una grandezza dipendente dalla temperatura (la lunghezza di un oggetto, il volume di un corpo, la resistenza elettrica di un filo o qualsiasi altra) ad una temperatura diversa da 20°C.

3. *Errori di stima da parte dello sperimentatore*: un esempio di questo tipo di errore si ha quando, nello stimare una certa frazione di divisio-

ne di una scala graduata, lo sperimentatore tende a valutarla sempre in difetto o sempre in eccesso; oppure quando, nel leggere la posizione di un indice mobile posto di fronte ad una scala graduata (non sullo stesso piano), lo sperimentatore tenga il proprio occhio sistematicamente alla sinistra o alla destra del piano passante per l'indice ed ortogonale alla scala stessa (*errore di parallasse*). Proprio per evitare questi errori di parallasse, dietro gli indici mobili degli strumenti più precisi si pone uno specchio che aiuta l'osservatore a posizionarsi esattamente davanti ad esso.

4. *Perturbazioni esterne*; un esempio di errori di questo tipo è la presenza di corpi estranei, come la polvere, interposti tra le ganasce di un calibro e l'oggetto da misurare: questo porta a sovrastimarne lo spessore.

   Un altro esempio è la misura della profondità del fondo marino o fluviale con uno scandaglio (filo a piombo) in presenza di corrente; questa fa deviare il filo dalla verticale e porta sempre a sovrastimare la profondità se il fondo è approssimativamente orizzontale.

5. *Perturbazione del fenomeno osservato da parte dell'operazione di misura.* Tra gli errori di questo tipo si può citare la misura dello spessore di un oggetto con un calibro a cursore, o col più sensibile calibro a vite micrometrica (Palmer); l'operazione richiede l'accostamento delle ganasce dello strumento all'oggetto, ed effettuandola si comprime inevitabilmente quest'ultimo con una forza sia pur piccola: e se ne provoca perciò una deformazione, con leggera riduzione dello spessore.

6. *Uso di formule errate o approssimate nelle misure indirette.* Un esempio è offerto dalla misura indiretta dell'accelerazione di gravità g, ottenuta dalla misura della lunghezza (cosiddetta ridotta) l di un apposito tipo di pendolo (di Kater) e dalla misura del suo periodo di oscillazione T_0, utilizzando la formula

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{{T_0}^2} \tag{2.1}$$

   ottenuta dalla nota espressione del periodo

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \tag{2.2}$$

   Ma questa formula vale solo, al limite, per oscillazioni di ampiezza

   infinitesima; mentre una formula che meglio approssima la realtà è[3]

$$T = T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\theta^2}{16}\right) = T_0\left(1+\frac{\theta^2}{16}\right)$$

   ed essa mostra come il periodo T sia una funzione leggermente crescente dell'ampiezza massima θ delle oscillazioni (qui espressa in radianti). L'uso della formula (2.1) di prima approssimazione per determinare g comporta dunque una sua sottostima, che diviene tanto più sensibile quanto maggiore è θ: questo in quanto si usa in luogo di T_0 la durata T di una oscillazione reale avente ampiezza non nulla — e perciò sempre superiore a T_0.

   La medesima misura è affetta anche da un'altra causa di errore sistematico, originata dal fatto che il pendolo non ruota oscillando attorno al filo orizzontale del coltello di sospensione; ma compie un moto in cui il profilo del taglio del coltello (che è approssimativamente un cilindro con raggio di curvatura minimo dell'ordine dei centesimi di millimetro) rotola sul piano di appoggio. A causa dell'impossibilità di una perfetta realizzazione meccanica dell'apparato, il fenomeno osservato è diverso da quello supposto che si intendeva produrre: e la sua errata interpretazione comporta una sovrastima di g.

   Infatti la formula del periodo, corretta *per questo solo effetto*, risulta essere

$$T = T_0\sqrt{1-\frac{r}{a}}$$

   (in cui r è il raggio di curvatura del filo del coltello ed a la distanza del centro di massa dal punto di appoggio) ed il T reale è sempre inferiore al T_0 definito nell'equazione (2.2).

Un modo per rivelare la presenza di errori sistematici insospettati può essere quello di misurare, se possibile, la stessa grandezza con strumenti e metodi diversi; questi presumibilmente sono affetti da errori aventi cause diverse e possono fornire perciò risultati differenti. Tuttavia neppure l'assenza di questo effetto dà la certezza che la misura sia esente da errori sistematici, ed essi sono generalmente individuati solo da una attenta e minuziosa analisi critica: sia dello strumento usato, sia della procedura seguita nella misura.

[3] Riguardo a questo punto ed al successivo, per una discussione approfondita del moto del pendolo si può consultare: G. Bruhat - Cours de Mécanique Physique - Ed. Masson, pagg. 311–321.

Una volta scoperto, un errore sistematico può essere eliminato: modificando o lo strumento o la procedura, oppure ancora apportando una opportuna correzione al risultato della misura (sebbene questo comporti generalmente un aumento dell'errore casuale: il fattore di correzione deve essere ricavato sperimentalmente, e quindi sarà affetto da un suo errore intrinseco).

Le prime cinque categorie sopra citate come possibili cause di errori sistematici, possono produrre anche errori casuali: così, per il primo tipo, gli inevitabili giochi meccanici e gli attriti tra parti dello strumento in moto relativo possono dar luogo a risultati fluttuanti; per quanto riguarda il secondo tipo, condizioni ambientali variabili e non del tutto controllabili (come temperatura e pressione) possono produrre variazioni imprevedibili del risultato.

Lo sperimentatore non ha un comportamento fisso e costante sia nelle valutazioni che nelle azioni compiute durante l'operazione di misura; come un esempio di questo terzo tipo di errori si consideri l'imprevedibile variabilità del tempo di reazione nell'avvio e nell'arresto di un cronometro a comando manuale.

Anche i disturbi esterni (quarto tipo), potendo essere di natura e intensità variabile, produrranno errori di un segno determinato (sistematici), ma di entità variabile ed imprevedibile; dunque, in parte, anche casuali.

Si aggiunga a ciò che disturbi casuali possono essere presenti nello strumento stesso per la costituzione corpuscolare della materia e per la natura fondamentalmente statistica di certe grandezze fisiche. Così l'equipaggio mobile, sospeso ad un filo lungo e sottile, di una bilancia a torsione di estrema sensibilità, avrà posizioni fluttuanti attorno a quella di equilibrio: non solo a causa del bombardamento incessante cui esso è sottoposto da parte delle molecole del gas circostante; ma anche nel vuoto assoluto, per l'agitazione termica dei suoi stessi costituenti.

Infine, anche le cause del quinto tipo possono dar luogo ad errori casuali se il disturbo del fenomeno o dell'oggetto prodotto dall'operazione di misura è di entità variabile e non controllata.

Alle cause comuni con gli errori sistematici si deve qui aggiungerne una ulteriore e tipica degli errori casuali, e consistente nella *imperfetta definizione della grandezza* che si intende misurare. Anche restando nell'ambito della fisica classica (e come accennato in relazione ai disturbi delle misure), certe grandezze, quali la pressione e la temperatura, sono in realtà legate a delle medie statistiche, come l'energia cinetica media molecolare; in quanto tali esse hanno un'indeterminazione intrinseca, che tuttavia non si manifesta nelle misure relative ad oggetti e fenomeni macroscopici se non in casi eccezionali.

Ad un livello meno fondamentale, se si misura più volte con un calibro il diametro di un oggetto sferico può avvenire che i risultati siano leggermente diversi di misura in misura; questo perché l'oggetto non può essere *perfettamente* sferico, ed ogni suo diametro ha una lunghezza generalmente diversa da quella di un altro.

Per concludere, gli errori casuali:

- Sono osservabili solo con uno strumento sufficientemente sensibile, cioè quando sono di entità maggiore dell'incertezza di lettura della scala.
- Possono essere ridotti; ad esempio migliorando le caratteristiche dello strumento, o controllando più strettamente le condizioni del suo uso e dell'ambiente e precisando meglio la procedura di esecuzione della misura: ma ciò con difficoltà crescente sempre più con la precisione. *Non possono quindi* ***mai*** *essere eliminati.*
- Posseggono tuttavia certe proprietà statistiche, che studieremo nell'ambito di una teoria matematica che verrà affrontata nei prossimi capitoli; la loro entità può pertanto essere *stimata.*

Compito della *teoria dell'errore* è appunto quello di stimare l'errore presumibilmente commesso nell'atto della misura, a partire dai dati sperimentali stessi. Riassumendo:

> *Scopo della misura di una grandezza fisica è il valutare sia il rapporto della grandezza stessa con una certa unità di misura, sia l'errore da cui tale rapporto è presumibilmente affetto.*

Il risultato delle misure dovrà quindi *sempre* essere espresso in una forma del tipo

$$l = 12.34 \pm 0.01 \text{ m}$$

in cui compaiano le tre parti *valore*, *errore* ed *unità di misura.*

2.5 Cifre significative ed arrotondamenti

Sempre per quanto riguarda il modo di esprimere il risultato delle nostre misure, *è un errore* spingere la valutazione del risultato stesso al di là della precisione sperimentale; in altre parole, se il calcolo dell'errore per la misura di una lunghezza indica incertezza sulla cifra, ad esempio, dei centimetri, è un errore dare nel risultato la cifra dei millimetri, o (peggio) dei decimi o

centesimi di millimetro. Nei risultati intermedi possiamo tenere per i successivi calcoli tutte le cifre che vogliamo; ma, giunti *al risultato finale*, e solo una volta che l'errore sia stato calcolato, bisogna troncare il risultato stesso al livello dell'errore da noi stimato ed arrotondare. Così[4]

$$\begin{array}{ccccccc} 12.34567 \pm 0.231 & \text{diventa} & 12.3 \pm 0.2 & \text{o} & 12.34 \pm 0.23 & ; \\ 12.34567 \pm 0.00789 & \text{diventa} & 12.346 \pm 0.008 & \text{o} & 12.3457 \pm 0.0079 & . \end{array}$$

2.6 Errore relativo

Una volta valutato l'errore presumibile Δx (errore *assoluto*) da cui è affetta la misura x_0 di una grandezza fisica x, il rapporto

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{|x_0|} \tag{2.3}$$

(indicato in *valore* od in *percentuale*) prende il nome di *errore relativo*; essendo definito attraverso il modulo del valore stimato della grandezza in esame, l'errore relativo è una quantità sicuramente positiva.

L'errore relativo è importante perché, in un certo senso, esprime la *qualità* della misura di una grandezza: è evidente come un errore assoluto stimato in 1 cm assuma ben diverso significato se riferito alla misura di un tavolo o di una distanza astronomica — ed è appunto la differenza fra gli errori relativi a suggerirci tale interpretazione.

È opportuno tuttavia osservare che l'errore relativo definito nella (2.3) è privo di senso quando il valore vero della grandezza che si misura è nullo; pertanto si potrà parlare di errore relativo solo quando si possa escludere tale eventualità con pratica certezza: nel caso cioè che sia $|x_0| \gg \Delta x$, ovvero che ϵ sia di almeno un ordine di grandezza inferiore all'unità.

[4] Come vedremo nelle ultime righe dell'appendice B, normalmente per l'errore si dà una sola cifra significativa; o al massimo due, se le misure sono state veramente molte — o anche per diminuire il disagio psicologico legato al "buttare via qualcosa" del frutto delle proprie fatiche...

Capitolo 3

Elementi di teoria della probabilità

Abbiamo già notato come, per la ineliminabile presenza degli errori di misura, quello che otteniamo come risultato della stima del valore di una grandezza fisica non sia praticamente mai il valore vero della grandezza stessa; inoltre, se ripetiamo più volte la misura, non otteniamo mai, in generale, nemmeno lo stesso risultato.

Da questo si deduce che, sulla base di misure ripetute comunque effettuate, non si potrà mai affermare che un qualsiasi numero reale sia (o non sia) il valore vero della grandezza stessa. È però evidente come tutti gli infiniti numeri reali non debbano essere posti sullo stesso piano: alcuni di essi saranno più verosimili (intuitivamente i numeri vicini ai risultati delle nostre misure ripetute), altri (più lontani) saranno meno verosimili.

Il problema della misura va dunque impostato *in termini probabilistici*; e potremo dire di averlo risolto quando, a partire dai dati sperimentali, saremo in grado di determinare un intervallo di valori avente una assegnata probabilità di contenere il valore vero. Prima di proseguire, introduciamo dunque alcuni elementi della *teoria della probabilità*.

3.1 La probabilità: eventi e variabili casuali

Oggetto della teoria delle probabilità è lo studio dei fenomeni *casuali* o *aleatori*: cioè fenomeni ripetibili (almeno in teoria) infinite volte e che possono manifestarsi in più modalità, imprevedibili singolarmente, che si escludono a vicenda l'una con l'altra; esempi tipici di fenomeni casuali sono il lancio di un dado o di una moneta, o l'estrazione di una carta da un mazzo. Come

risultato del lancio della moneta o del dado, essi cadranno e si ridurranno in quiete con una determinata faccia rivolta verso l'alto; per la moneta le possibilità sono due, mentre per il dado sono sei.

Il complesso delle possibili modalità con cui un fenomeno casuale si può verificare costituisce l'insieme (o *spazio*) dei *risultati*, S; esso può essere costituito da un numero finito o infinito di elementi.

Definiremo poi come *evento casuale* l'associazione di una o più di queste possibili modalità: ad esempio, lo spazio dei risultati per il fenomeno "lancio di un dado" è un insieme composto da sei elementi; ed uno degli eventi casuali che è possibile definire (e che corrisponde al realizzarsi dell'uno o dell'altro di tre dei sei possibili risultati) consiste nell'uscita di un numero dispari. L'insieme di tutti i possibili eventi (o *spazio degli eventi*) $\mathcal{E}$ è dunque l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S (*insieme potenza* o *insieme delle parti* di S); compresi l'insieme vuoto $\emptyset$ ed S stesso, che si chiamano anche rispettivamente *evento impossibile* ed *evento certo*.

Se si è in grado di fissare una legge di corrispondenza che permetta di associare ad ogni modalità di un fenomeno casuale scelta nell'insieme S uno ed un solo numero reale x, questo numero prende il nome di *variabile casuale* definita su S. Le variabili casuali possono assumere un numero finito od infinito di valori, e possono essere discrete o continue; è da notare che, per la presenza degli errori, la misura di una grandezza fisica può essere considerata come un evento casuale — ed il risultato numerico che da tale misura otteniamo è una variabile casuale che possiamo associare all'evento stesso.

3.2 La probabilità: definizioni

La definizione "classica" di probabilità è la seguente:

> *Si definisce come probabilità di un evento casuale il rapporto tra il numero di casi favorevoli al presentarsi dell'evento stesso ed il numero totale di casi possibili, purché tutti questi casi possibili siano ugualmente probabili.*

e se ne ricava immediatamente il seguente

> COROLLARIO: *la probabilità di un evento casuale è un numero compreso tra zero e uno, che assume il valore zero per gli eventi impossibili ed uno per quelli certi.*

La definizione "classica" sembra sufficiente a permetterci di calcolare le probabilità di semplici eventi casuali che possano manifestarsi in un numero

finito di modalità equiprobabili (ad esempio per i giochi d'azzardo), ma è intrinsecamente insoddisfacente perché racchiude in sé stessa una *tautologia*: si nota immediatamente come, per definire la probabilità, essa presupponga che si sia già in grado di valutare l'equiprobabilità delle varie modalità con cui può manifestarsi l'evento considerato. Nel caso di una variabile casuale continua, ciò si traduce nell'indeterminazione di quale tra le variabili topologicamente equivalenti (ossia legate da trasformazioni continue) sia quella equiprobabile, cioè con probabilità per ogni intervallo proporzionale all'ampiezza dell'intervallo stesso.

Si possono dare della probabilità definizioni più soddisfacenti dal punto di vista logico, ad esempio la seguente (definizione *empirica*[1], teorizzata da von Mises[2]): definiamo la *frequenza relativa* $f(E)$ con cui un evento casuale E si è presentato in un numero totale N di casi reali come il rapporto tra il numero n di volte in cui l'evento si è effettivamente prodotto (*frequenza assoluta*) ed il numero N delle prove effettuate; la probabilità di E si definisce euristicamente come l'estensione del concetto di frequenza relativa su un numero grandissimo di prove, cioè

$$p(E) \approx \lim_{N\to\infty} f(E) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{n}{N}\right) .$$

3.3 Proprietà della probabilità

Proseguendo in questa nostra esposizione, useremo ora la definizione empirica per ricavare alcune proprietà delle probabilità di eventi casuali: queste stesse proprietà, come vedremo nel paragrafo 3.4.1, possono essere ricavate a partire dalla *definizione assiomatica* (matematicamente soddisfacente, e che verrà presentata nel paragrafo 3.4). Il motivo per cui ci basiamo sulla definizione empirica è sia la maggiore semplicità delle dimostrazioni che la concretezza e l'intuitività dei ragionamenti, che si possono facilmente esemplificare con semplici procedure pratiche come il lancio di monete e dadi.

[1] Anche questa definizione non è completamente soddisfacente dal punto di vista concettuale (come vedremo più in dettaglio nel paragrafo 3.5); ma è tra le più intuitive, perché tra le più vicine all'uso pratico.

[2] Richard von Mises fu un matematico che visse dal 1883 al 1953; compì ricerche nei campi della probabilità e della statistica, ma soprattutto in quello della matematica applicata alla meccanica dei fluidi (nel 1913 istituì all'Università di Vienna il primo corso al mondo sul volo, e nel 1915 progettò un aereo che pilotò personalmente nel corso della I guerra mondiale).

3.3.1 L'evento complementare

La mancata realizzazione dell'evento E costituisce l'*evento complementare* ad E, che indicheremo con $\bar{E}$; i due eventi E ed $\bar{E}$ si escludono mutuamente, ed esauriscono l'insieme di tutti i possibili risultati di una prova od esperimento elementare del tipo considerato. La frequenza relativa di $\bar{E}$ su N prove è

$$f(\bar{E}) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - f(E)$$

da cui si ricava

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E) \qquad \text{o anche} \qquad p(E) + p(\bar{E}) = 1 \ .$$

Analogamente si può dimostrare che, se $A, B, \ldots, Z$ sono eventi casuali *mutuamente esclusivi* e che *esauriscono l'insieme di tutti i possibili risultati*, vale la

$$p(A) + p(B) + \cdots + p(Z) = 1 \ . \tag{3.1}$$

3.3.2 Probabilità totale

Il risultato di una prova o esperimento più complesso può essere costituito dal verificarsi di due eventi simultanei in luogo di uno solo; come esempio, si consideri il lancio di una moneta e l'estrazione contemporanea di una carta da un mazzo. Se E indica l'apparizione della testa ($\bar{E}$ allora sarà l'apparizione della croce) ed F l'estrazione di una carta nera ($\bar{F}$ di una carta rossa), esistono quattro eventi fondamentali non ulteriormente decomponibili e che si escludono vicendevolmente: EF, $E\bar{F}$, $\bar{E}F$ e $\bar{E}\bar{F}$.

Il simbolo EF indica qui l'evento composto *prodotto logico* dei due eventi semplici E ed F, cioè quello consistente nel verificarsi *sia dell'uno che dell'altro*. Se ora, su N prove effettuate, la frequenza assoluta con cui i quattro eventi fondamentali si sono verificati è quella indicata nella seguente tabella:

	F	$\bar{F}$
E	n_{11}	n_{12}
$\bar{E}$	n_{21}	n_{22}

le rispettive frequenze relative saranno

$$f(EF) = \frac{n_{11}}{N} \qquad f(E\bar{F}) = \frac{n_{12}}{N}$$

$$f(\bar{E}F) = \frac{n_{21}}{N} \qquad f(\bar{E}\bar{F}) = \frac{n_{22}}{N} \ .$$

Facendo uso della definizione empirica di probabilità si trova, partendo dalle seguenti identità:

$$f(E) = \frac{n_{11}+n_{12}}{N} = f(EF) + f(E\bar{F})$$

$$f(F) = \frac{n_{11}+n_{21}}{N} = f(EF) + f(\bar{E}F)$$

che devono valere le

$$p(E) = p(EF) + p(E\bar{F}) \ ,$$

$$p(F) = p(EF) + p(\bar{E}F) \ ,$$

ed altre due simili per $\bar{E}$ e $\bar{F}$.

Se ora si applica la definizione empirica all'evento complesso $E+F$ *somma logica* degli eventi semplici E ed F, definito come l'evento casuale consistente nel verificarsi *o dell'uno o dell'altro di essi o di entrambi*, otteniamo

$$\begin{aligned} f(E+F) &= \frac{n_{11}+n_{12}+n_{21}}{N} \\ &= \frac{(n_{11}+n_{12})+(n_{11}+n_{21})-n_{11}}{N} \\ &= f(E) + f(F) - f(EF) \end{aligned}$$

da cui, passando al limite,

$$p(E+F) = p(E) + p(F) - p(EF) \ .$$

Nel caso particolare di due eventi E ed F che si escludano mutuamente (cioè per cui sia $p(EF) = 0$ e $n_{11} \equiv 0$) vale la cosiddetta *legge della probabilità totale*:

$$p(E+F) = p(E) + p(F)$$

Questa si generalizza poi per induzione completa al caso di più eventi (sempre però *mutuamente esclusivi*), per la cui somma logica la probabilità è uguale alla somma delle probabilità degli eventi semplici:

$$p(A+B+\cdots+Z) = p(A) + p(B) + \cdots + p(Z) \ . \tag{3.2}$$