Il Sudoku

Maurizio Loreti[*]

Dicembre 2006

1 Introduzione

Il *Sudoku* è un gioco della categoria dei rompicapo, nato in Giappone nel 1984; utilizza i numeri (gli interi dall'uno al nove), ma non è affatto un gioco matematico quanto, piuttosto, un gioco di logica: se ai numeri si sostituissero altri nove simboli differenti qualsiasi, nulla cambierebbe.

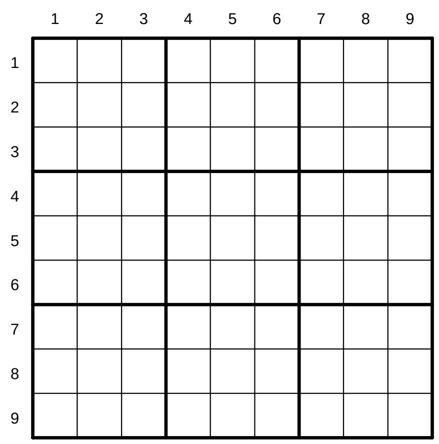

Figura 1: la griglia del Sudoku

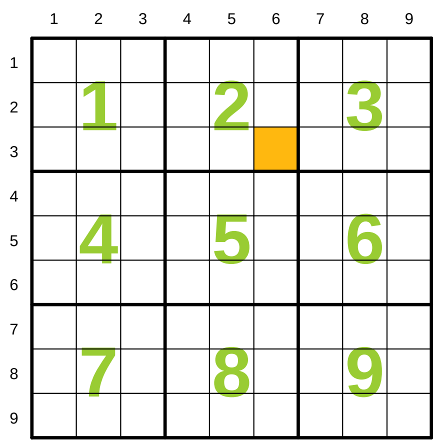

Figura 2: regioni e coordinate

Il nome "Sudoku" deriva dalla contrazione di un frase in lingua giapponese che, translitterata in italiano, suonerebbe più o meno come *suji wa dokushin ni kagiru*: ed il cui significato è *sono ammessi solo numeri singoli.* Il Sudoku si gioca usando una griglia come quella della figura 1, quadrata e divisa in 81 *posizioni* (o *caselle*, o *quadrati*) disposte su 9 *righe* e 9 *colonne*; all'interno

[*] Alcune parti riprese da `http://www.madoverlord.com/projects/sudoku.t`

della griglia si distinguono poi anche 9 *regioni*, ovvero i 9 quadrati 3×3 delimitati, sempre nella figura 1, dalle linee più spesse.

1.1 Terminologia

Per individuare sulla griglia una particolare posizione ci si riferisce alle sue coordinate cartesiane, identificando la riga r e la colonna c cui la casella appartiene (attraverso la numerazione riportata sui lati della figura 1): si scrive prima il numero di riga e poi quello di colonna, e la notazione usata è (r, c); ad esempio, nella figura 2 è evidenziata in giallo la posizione $(3, 6)$ della griglia. Anche le regioni sono contraddistinte da un numero che va da 1 a 9, cominciando dall'angolo superiore sinistro della griglia e continuando orizzontalmente: sempre nella figura 2, a titolo di esempio, compaiono in verde i numeri che identificano le regioni.

Il gioco consiste, a partire da una griglia in cui sono già stati posti dei numeri (come già detto, gli interi dall'1 al 9) in qualcuna delle caselle, nel completare lo schema associando a tutte le posizioni libere altri numeri in modo tale che *nessuno di essi compaia mai due volte nella stessa riga, o nella stessa colonna, o nella stessa regione*. Un Sudoku ben progettato dovrebbe sempre avere una *soluzione unica*; ma non sempre questo è vero.

2 Come si risolve un Sudoku?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6			2					9
2						7	6		4
3			4	1	8				
4	3	5	2	8	6		4		1
5			1		2		8		
6	4		8		7	1	9	5	2
7					5	3	2		
8	5		3	4					
9	1					8			5

Figura 3: un Sudoku da risolvere

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**6**	1378	57	**2**	34	45	1357	1378	**9**
2	289	12389	59	359	39	**7**	**6**	1238	**4**
3	279	2379	**4**	**1**	**8**	569	357	237	37
4	**3**	**5**	**2**	**8**	**6**	9	**4**	7	**1**
5	79	679	**1**	359	**2**	459	**8**	367	367
6	**4**	6	**8**	3	**7**	**1**	**9**	**5**	**2**
7	789	46789	679	679	**5**	**3**	**2**	146789	678
8	**5**	26789	**3**	**4**	19	269	17	16789	678
9	**1**	24679	679	679	9	**8**	37	34679	**5**

Figura 4: i *numerini*

Nella figura 3 è riportato lo schema iniziale di un Sudoku. Se scegliamo a caso una posizione vuota, è chiaro che le regole appena esposte ci permettono di escludere che alcuni dei 9 numeri che abbiamo a disposizione vi possano essere presenti: ad esempio, nella casella $(2,5)$ non possiamo mettere un 1, un 2, un 7 o un 8 (sono in altre caselle della stessa regione); né un 4 o un 6 (sono in altre caselle della stessa riga); né un 5 (è in un'altra casella della stessa colonna); rimangono quindi possibili soltanto i numeri 3 e 9.

In genere, quando ci si confronta con un Sudoku, si comincia a fare queste considerazioni o per tutte le caselle libere o, quando si è acquistata una certa esperienza, solo per le caselle libere di una regione che si intuisce essere la più facile da affrontare; e, per aiutare la memoria, si scrivono a matita *in piccolo* in un angolo di ogni casella tutti i possibili candidati (i cosiddetti *numerini*): così come appare nella figura 4. Di seguito esamineremo varie tecniche di soluzione, dando per ognuna di esse il nome italiano ed il corrispondente inglese; anche se, tra i vari gruppi di appassionati, non sempre si usano gli stessi termini.

2.1 Numeri obbligati nudi (*naked single*)

È possibile che, considerando tutte le caselle libere, alcune di esse possano assumere soltanto un valore: in questo caso possiamo direttamente scrivere l'unico numero possibile in quella casella, e cancellarlo dai numerini delle altre posizioni della stessa riga, colonna e regione. Per il puzzle della figura 3, i numeri obbligati nudi sono nelle caselle $(4,6)$, $(4,8)$, $(6,2)$, $(6,4)$ e $(9,5)$ (che nella figura 4 sono state colorate per metterle in evidenza).

A questo punto, dopo aver risolto queste caselle, si ripete la ricerca: troveremmo ancora 3 numeri obbligati nudi, e dovremmo scrivere un 3 in $(2,5)$, un 5 in $(5,4)$ ed un 1 in $(8,5)$. Iterando il procedimento, si vede che il Sudoku della figura 3 (che è molto facile) si può risolvere con la sola ricerca dei numeri obbligati nudi.

2.2 Numeri obbligati nascosti (*hidden single*)

È facile capire perché questi numeri siamo chiamati "obbligati"; ma perché sono *nudi*? Guardiamo la figura 5, dove è riportato un altro schema di Sudoku completo di numerini: nella casella $(1,6)$, messa in evidenza in giallo, ci sono tre possibili scelte: ma, se si osserva con attenzione, si vede anche che solo in questa casella, tra tutte quelle vuote che compongono la colonna 6, compare tra i numerini il 5. Visto che uno (ed un solo) 5 deve essere obbligatoriamente presente in ogni colonna, necessariamente quello della colonna 6 deve trovarsi in questa posizione: il 5 è quindi ancora un numero "obbligato": ma più difficile da vedere, *nascosto* dalla presenza del 3 e del 9 nella stessa posizione.

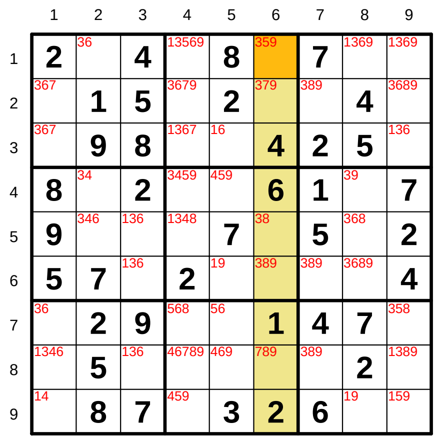

Figura 5: numero obbligato nascosto

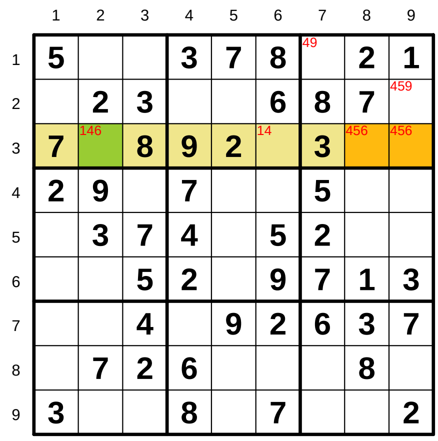

Figura 6: blocco di riga

In definitiva: se all'interno di uno stesso *gruppo* (intendendo con questa parola o una regione, o una colonna, o una riga) un numerino compare in una sola posizione, quella posizione corrisponde ad un numero obbligato nascosto e può essere risolta.

2.3 Blocco di righe o di colonne (*blocking numbers*)

Guardiamo la figura 6, dove sono stati messi in evidenza i numerini della regione 3: esaminandoli, ci si rende conto che il 6 deve trovarsi o nella casella $(3, 8)$ o in quella $(3, 9)$; ed, in ogni caso, nella riga 3. In questo caso si dice che quella riga è *bloccata* dal 6; intendendo dire che, se il 6 della regione 3 si trova nella riga 3, in nessun'altra casella della stessa riga 3 (che appartenga ad altre regioni) può essere presente un 6. In particolare, possiamo cancellare il 6 dai numerini della posizione $(3, 2)$.

In definitiva: se in una regione un numerino compare solo in una riga o una colonna, possiamo cancellarlo da tutte le altre posizioni di quella riga o colonna.

2.4 N-tuple nude (*naked N-tuples*)

Supponiamo che in un insieme di N caselle appartenenti ad uno stesso gruppo (o riga, o colonna, o regione) compaiano gli stessi N numerini; si dice allora che quelle N caselle costituiscono una *N-tupla nuda*. Come esempio, nella figura 7 compare una coppia nuda ($N = 2$): il 3 e l'8, nelle posizioni $(5, 6)$ e $(6, 6)$, che appartengono contemporaneamente a due gruppi: alla

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**2**		**4**		**8**	**5**	**7**		
2		**1**	**5**		**2**	**9**		**4**	
3		**9**	**8**			**4**	**2**	**5**	
4	**8**		**2**	**5**	49	**6**	**1**		**7**
5	**9**			1348	**7**	38	**5**		**2**
6	**5**	**7**		**2**	19	38			**4**
7		**2**	**9**		**5**	**1**	**4**	**7**	
8	**1**	**5**				**7**		**2**	
9	**4**	**8**	**7**	**9**	**3**	**2**	**6**	**1**	**5**

Figura 7: una coppia nuda

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**2**		**4**		**8**	**5**	**7**		
2	367	**1**	**5**		**2**			**4**	
3	367	**9**	**8**			**4**	**2**	**5**	
4	**8**		**2**			**6**	**1**		**7**
5	**9**				**7**		**5**		**2**
6	**5**	**7**		**2**					**4**
7	36	**2**	**9**			**1**	**4**	**7**	
8	1346	**5**	136					**2**	
9	14	**8**	**7**		**3**	**2**	**6**		

Figura 8: una coppia nascosta

regione 5 ed alla colonna 6. Viste le regole del Sudoku, possiamo affermare che in una di queste due posizioni *deve* esserci un 3 e nell'altra un 8; e cancellare questi due simboli da tutti i numerini della colonna 6 e della regione 5 — in particolare, le possibilità per la casella $(5, 4)$ si restringono all'1 e al 4.

In definitiva: se troviamo una N-tupla nuda, possiamo cancellare i suoi N numerini da tutte le altre posizioni del gruppo della N-tupla.

2.5 N-tuple nascoste (*hidden N-tuples*)

Il concetto di *N-tupla nascosta* è in un certo senso complementare a quello di N-tupla nuda; se in N posizioni appartenenti ad uno stesso gruppo, e *solo in queste N posizioni*, sono presenti gli stessi N numerini, allora ogni altro numerino di quelle posizioni può essere cancellato.

Riferiamoci per esempio alla figura 8: all'interno della colonna 1, i numerini 1 e 4 compaiono soltanto nelle posizioni $(8, 1)$ e $(9, 1)$. Viste le regole del Sudoku, questo implica che una di queste due posizioni *deve* contenere l'1 e l'altra *deve* contenere il 4. Quindi non è possibile che nella casella $(8, 1)$ possa esservi un 3 o un 6; ed i numerini della casella $(8, 1)$ si riducono ad 1 e 4 soltanto. La coppia nuda che adesso si presenta in $(8, 1)$ e $(9, 1)$ rende infine possibile cancellare l'1 dalla casella $(8, 3)$ della stessa regione.

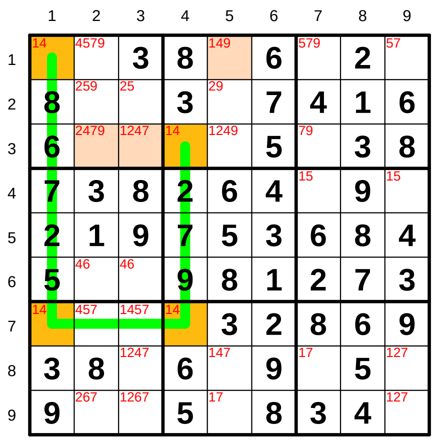

Figura 9: catena di coppie nude

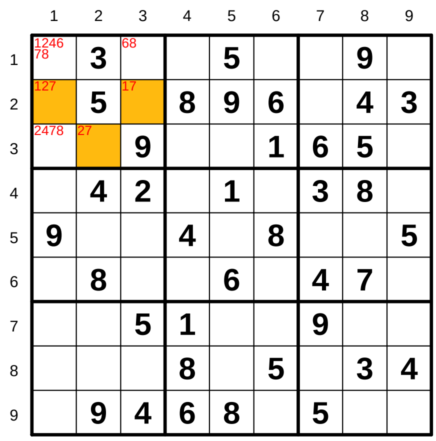

Figura 10: un insieme nudo

2.6 Catene di coppie nude (*remote naked pairs*)

Delle coppie nude abbiamo già parlato; talvolta, però, capita di trovare diverse coppie nude che abbiano in comune un elemento. Per chiarire il concetto, si osservi la figura 9 (nella quale abbiamo scritto tutti i numerini delle caselle libere) dove ci sono tre coppie nude che associano posizioni che possono contenere o 1 o 4; ci riferiamo alle caselle $(1,1)$, $(7,1)$, $(7,4)$ e $(3,4)$, che abbiamo unito con una linea verde.

Seguendo questa linea verde si devono necessariamente incontrare elementi "discordi" della coppia nuda: ovvero, qualunque sia il numero (o 1 o 4) che si trova nella casella $(1,1)$, nella casella $(7,1)$ *deve esserci l'altro*; e quindi nella casella $(7,4)$ troveremo *lo stesso* della casella $(1,1)$ e nella casella $(3,4)$ troveremo ancora *l'altro*.

Prendiamo due caselle discordi della catena: se ci sono posizioni che sono contemporaneamente sia in un gruppo con la prima sia in un gruppo con la seconda, è impossibile che esse contengano o l'uno o l'altro dei due elementi della coppia. Nell'esempio che stiamo seguendo, prendiamo i due estremi della catena: le caselle $(1,1)$ e $(3,4)$, che appunto contengono elementi discordi della coppia; cioè in una di esse (anche se non sappiamo in quale) c'è un 1, e nell'altra c'è un 4.

Le caselle $(3,2)$ e $(3,3)$ appartengono alla stessa regione della $(1,1)$ ed alla stessa riga della $(3,4)$: *quindi non possono contenere né 1 né 4*, ed i loro numerini diventano rispettivamente "279" e "27". Allo stesso modo, la casella $(1,5)$ appartiene alla stessa riga della $(1,1)$ ed alla stessa regione della $(3,4)$: quindi anch'essa non può contenere né 1 né 4, e deve per forza contenere un 9.

2.7 Insiemi nudi (*comprehensive naked sets*)

Gli *insiemi nudi* sono una generalizzazione delle N-tuple nude, più difficili da scorgere ma sempre molto utili; si tratta di individuare all'interno di un gruppo (riga, colonna o regione) un insieme di N caselle che contengano, tutti o in parte, *soltanto* gli stessi N numerini. Al solito, spieghiamoci con un esempio: guardando la figura 10 si vede che le *tre* caselle $(2, 1)$, $(2, 3)$ e $(3, 2)$ (che appartengono tutte alla stessa regione) contengono soltanto i *tre* numerini 1, 2 e 7. Nella prima di queste caselle compaiono tutti quanti, mentre nelle altre ve ne sono soltanto due; quelle tre caselle costituiscono, appunto, un insieme nudo.

Se pensiamo un attimo alle regole del Sudoku, non è difficile capire che i tre numeri 1, 2 e 7 non possono che stare nelle tre caselle dell'insieme nudo: se per assurdo uno o più di essi si trovassero in qualcuna delle altre posizioni, infatti, non riusciremmo mai a riempire tutte quante quelle del nostro insieme. Una volta che ci siamo resi conto di questo, il resto è facile: si eliminano 1, 2 e 7 dai numerini di tutte le altre caselle, così che nella posizione $(1, 1)$ rimangono come candidati 4, 6 e 8 e nella $(3, 1)$ rimangono solo 4 e 8.

2.8 Insiemi nascosti (*comprehensive hidden sets*)

Gli *insiemi nascosti* sono una generalizzazione degli insiemi nudi e, come per questi, è difficile accorgersi della loro esistenza: si tratta di trovare, all'interno di uno stesso gruppo, esattamente N caselle che contengano, tutti o in parte, gli stessi N numerini (e, fin qui, con gli insiemi nudi non c'è differenza); e, in più, alcune di queste caselle possono eventualmente contenere dei numerini ulteriori. Se esaminiamo la riga 5 della figura 11, troviamo appunto un insieme nascosto: soltanto le quattro caselle in colonna 1, 2, 8 e 9 infatti contengono i numerini 2, 6, 7 e 9; che mancano del tutto dalle altre cinque caselle.

Ripetendo gli stessi ragionamenti appena fatti, non è difficile capire che nelle N caselle individuate devono trovarsi, in un ordine che ancora non conosciamo, gli N numerini dell'insieme; per cui possiamo cancellare dalle possibilità tutti i numerini "addizionali". Nella figura 11 insomma le caselle nelle colonne 1, 2, 8 e 9 *devono* contenere i valori 2, 6, 7 e 9; possiamo insomma cancellare 1 dai numerini di $(5, 1)$, 5 da quelli di $(5, 8)$, e 4 ed 8 da quelli di $(5, 9)$.

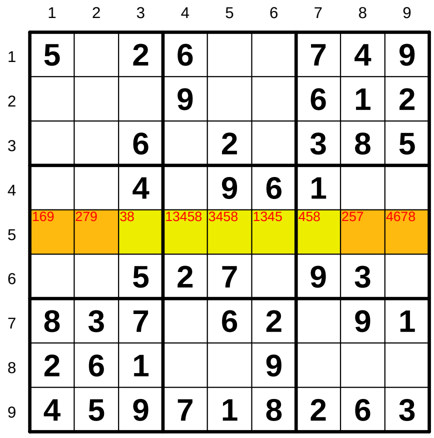

Figura 11: un insieme nascosto

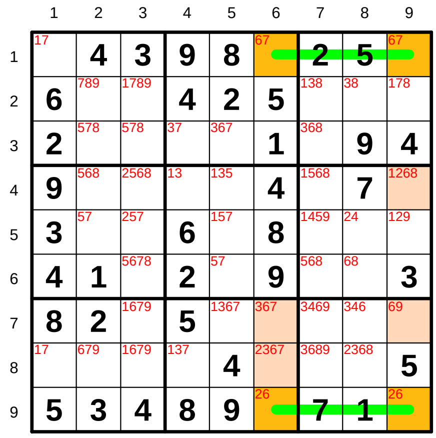

Figura 12: le ali isolate

2.9 Le ali isolate (*X-wings*)

Qui si tratta di individuare, tra i numerini, una configurazione ben precisa: ovvero dei valori che, in una riga o in una colonna, si presentino due volte soltanto. Se abbiamo la fortuna di trovare due di queste coppie (relative allo stesso numerino) che formino sulla griglia un rettangolo, ebbene, abbiamo trovato *due ali* isolate.

Nella figura 12, ad esempio, troviamo il 6 tra i numerini nella riga 1 solo nelle due caselle in colonna 6 ed in colonna 9; anche nella riga 9 il 6 compare soltanto due volte — ed *esattamente nelle stesse colonne*. Perché questa configurazione ci interessa? Se nella riga 1 il 6 fosse in $(1,6)$, allora nella riga 9 necessariamente sarebbe in $(9,9)$; e, se nella riga 1 il 6 fosse invece in $(1,9)$, nella riga 9 si troverebbe in $(9,6)$. Quindi, comunque vadano le cose, ne abbiamo uno in colonna 6 ed uno in colonna 9; ed allora *possiamo cancellare i 6* dai numerini di tutte le caselle di queste colonne: da $(4,9)$, $(7,6)$, $(7,9)$ (dove rimane un numero obbligato nudo), e da $(8,6)$.

2.10 Le ali doppie (*XY-wings*)

Indichiamo con X, Y e Z tre differenti simboli del Sudoku. Dobbiamo esaminare tutte le caselle che contengano solo due numerini sperando di trovarne tre che contengano rispettivamente le combinazioni XY, XZ e YZ, in modo che XY ed XZ appartengano ad uno stesso gruppo (riga, colonna o regione) e XY e YZ ad un altro; se ci riusciamo, possiamo cancellare Z da tutte le caselle che siano in gruppo sia con XZ che YZ.

Chiariamo tutto con un esempio. Si veda la figura 13: le tre posizioni

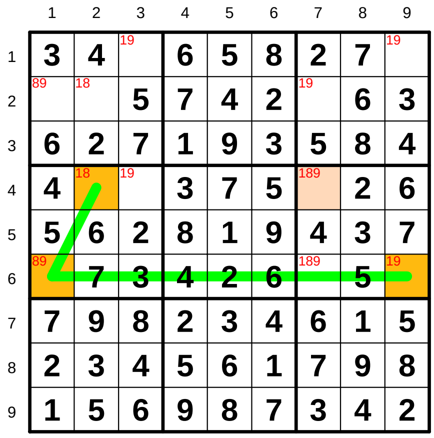

Figura 13: le ali doppie

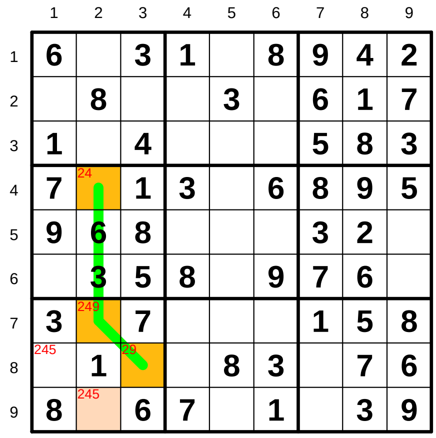

Figura 14: le ali triple

$(4,2)$, $(6,1)$ e $(6,9)$ contengono le tre differenti combinazioni dei numerini 1, 8 e 9; inoltre le prime due appartengono alla stessa regione, e le ultime due alla stessa riga. Chiamiamo $(6,1)$ *vertice* delle nostre ali, e $(4,2)$ e $(6,9)$ *estremità*; e consideriamo la casella al vertice: se lì vi fosse un 8 allora in $(4,2)$ dovrebbe necessariamente esservi un 1; e se, invece, vi fosse un 9, l'1 dovrebbe necessariamente essere in $(6,9)$. Di conseguenza, in una delle due estremità delle ali deve per forza esserci un 1; e se esiste una casella, nell'esempio di figura 13 la $(4,7)$, che appartenga a due gruppi che comprendano ancora le due estremità delle ali, non è possibile che in essa ci sia un 1 (che possiamo cancellare dai suoi numerini).

2.11 Le ali triple (*XYZ-wings*)

La configurazione è analoga a quella precedente: ci sono tre caselle, a due a due appartenenti allo stesso gruppo; ma nel vertice delle ali stavolta c'è una terna di numerini (chiamiamoli XYZ) mentre nelle due estremità vi sono due coppie XZ e YZ. In questo caso, se esistono caselle che siano in gruppo *contemporaneamente con le tre caselle* delle ali, queste non possono contenere la Z.

L'esempio è in figura 14: il vertice delle ali è la posizione $(7,2)$ e le due estremità sono le caselle $(4,2)$ e $(8,3)$; la casella $(9,2)$, che è nella stessa colonna di $(4,2)$ e $(7,2)$ e nella stessa regione di $(8,3)$, non può contenere il 2.

Qual'è il ragionamento? La Z (il 2, nell'esempio) potrebbe essere nel vertice delle ali; se non ci fosse, nel vertice dovrebbe esserci o X o Y e, in questo caso, la Z sarebbe necessariamente in una delle due estremità (nel primo caso in quella che contiene XZ, nel secondo caso in quella che contiene YZ). Di conseguenza, qualunque casella che sia in gruppo con tutte e tre non può contenere questo numerino.